

Fondamenti della matematica

Lezione 1: la crisi nei fondamenti

Zona Autonoma Milano, 17 marzo 2026

La matematica come problema filosofico

Perché la matematica è speciale?

Premessa: la matematica *funziona*, ci consente di fare cose potenzialmente utili.

Perché la matematica è speciale?

Premessa: la matematica *funziona*, ci consente di fare cose potenzialmente utili.

Caratteristiche:

- **a priori:** non ci sono esperimenti;

Perché la matematica è speciale?

Premessa: la matematica *funziona*, ci consente di fare cose potenzialmente utili.

Caratteristiche:

- **a priori:** non ci sono esperimenti;
- verità **necessarie**;

Perché la matematica è speciale?

Premessa: la matematica *funziona*, ci consente di fare cose potenzialmente utili.

Caratteristiche:

- **a priori:** non ci sono esperimenti;
- verità **necessarie**;
- oggetti **astratti**.

Perché la matematica è speciale?

Premessa: la matematica *funziona*, ci consente di fare cose potenzialmente utili.

Caratteristiche:

- **a priori:** non ci sono esperimenti;
- verità **necessarie**;
- oggetti **astratti**.

Come si coniuga il successo della matematica *come scienza*
con queste tre caratteristiche?

Problema metafisico: qual è l'ambito di applicazione della matematica? Cosa sono gli oggetti di cui si occupa?

Il problema dell'integrazione

Problema metafisico: qual è l'ambito di applicazione della matematica? Cosa sono gli oggetti di cui si occupa?

Problema epistemologico: come sono giustificate le proposizioni della matematica? Cosa significa che sono **necessarie**?

Problema metafisico: qual è l'ambito di applicazione della matematica? Cosa sono gli oggetti di cui si occupa?

Problema epistemologico: come sono giustificate le proposizioni della matematica? Cosa significa che sono **necessarie**?

Problema dell'integrazione: come si integra una certa metafisica della matematica con una certa epistemologia?

Le proposizioni della matematica sono **vere**.

Le proposizioni della matematica sono **vere**.

	analitiche	sintetiche
a priori		
a posteriori		

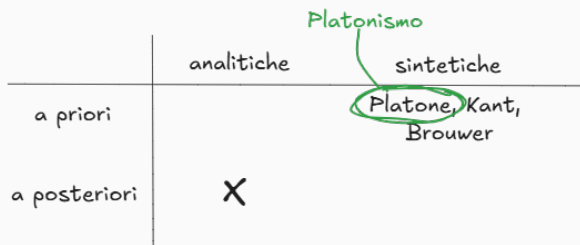
Le proposizioni della matematica sono **vere**.

	analitiche	sintetiche
a priori		
a posteriori	X	

Le proposizioni della matematica sono **vere**.

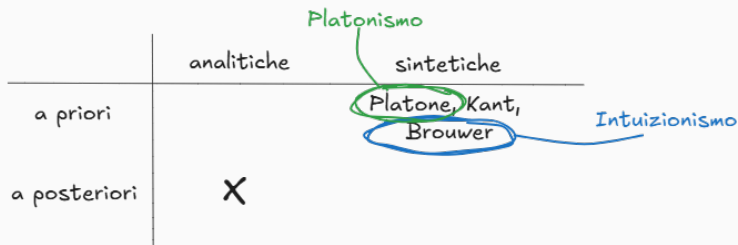
	analitiche	sintetiche
a priori		Platone, Kant, Brouwer
a posteriori	X	

Le proposizioni della matematica sono **vere**.



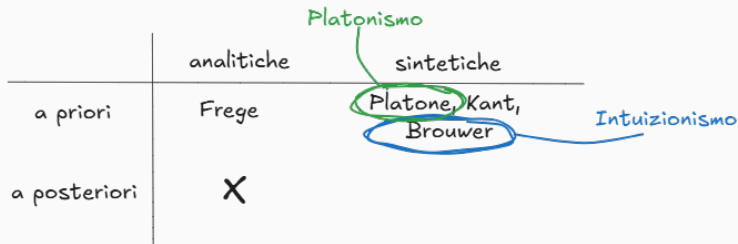
Un po' di tassonomia

Le proposizioni della matematica sono **vere**.

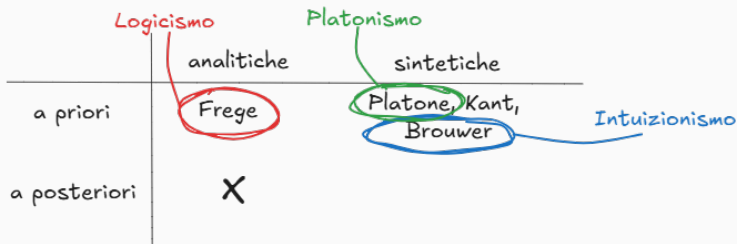


Un po' di tassonomia

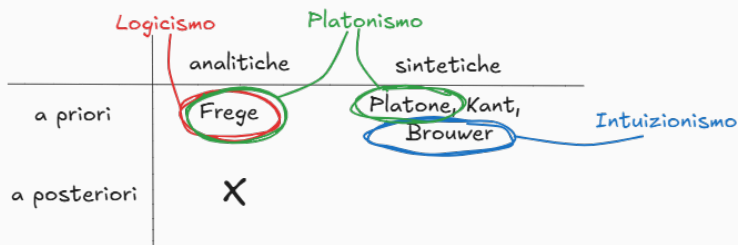
Le proposizioni della matematica sono **vere**.



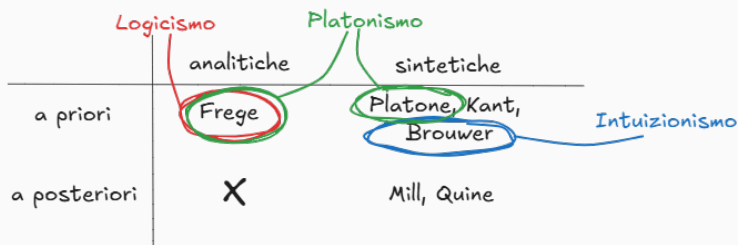
Le proposizioni della matematica sono **vere**.



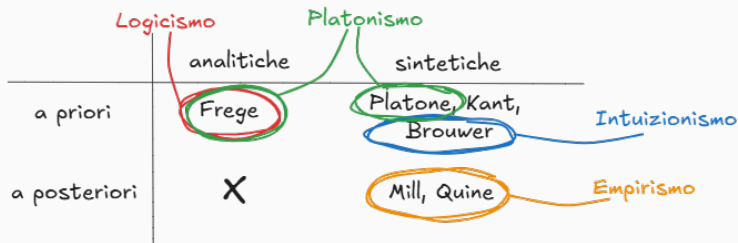
Le proposizioni della matematica sono **vere**.



Le proposizioni della matematica sono **vere**.

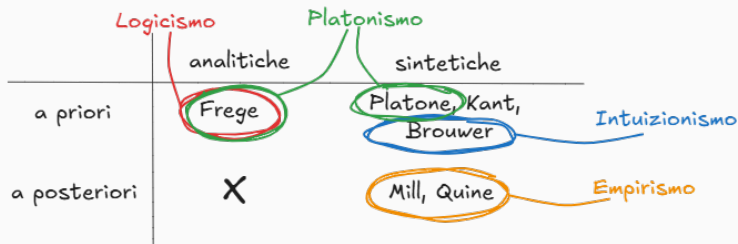


Le proposizioni della matematica sono **vere**.



Un po' di tassonomia

Le proposizioni della matematica sono **vere**.



Le proposizioni della matematica **non** sono **significative**: **formalismo**.

Platone e Kant

Tre principi per gli oggetti matematici:

Tre principi per gli oggetti matematici:

- **realismo:** esistono indipendentemente da noi;

Tre principi per gli oggetti matematici:

- **realismo:** esistono indipendentemente da noi;
- **astrattezza:** sono astratti;

Tre principi per gli oggetti matematici:

- **realismo:** esistono indipendentemente da noi;
- **astrattezza:** sono astratti;
- **realtà:** esistono tanto quanto gli oggetti fisici.

Tre principi per gli oggetti matematici:

- **realismo:** esistono indipendentemente da noi;
- **astrattezza:** sono astratti;
- **realtà:** esistono tanto quanto gli oggetti fisici.

Una opportuna **facoltà della ragione** ci fa esperire questi oggetti.

Due classificazioni delle proposizioni:

Due classificazioni delle proposizioni:

- **a priori vs a posteriori:** dipendenza dall'esperienza vs indipendenza;
- **analitico vs sintetico (esplicativo vs ampliativo):** "A è B" è analitica se il predicato B è già contenuto nel concetto di A.

Affinità: proposizioni della matematica sono **sintetiche** e **a priori**.

Affinità: proposizioni della matematica sono **sintetiche** e **a priori**.

Due **divergenze:**

Affinità: proposizioni della matematica sono **sintetiche** e **a priori**.

Due **divergenze**:

- **Platone:** l'anima ha esperito gli oggetti matematici perché è sempre esistita.
Kant: spazio e tempo sono forme a priori dell'intuizione (**idealismo trascendentale**).
- Kant non sottoscrive il principio di realtà degli oggetti matematici.

La formalizzazione dell'analisi

Il bisogno di rigore: l'analisi nell'800

Analisi matematica: fondamento della fisica nel XIX secolo.

Il bisogno di rigore: l'analisi nell'800

Analisi matematica: fondamento della fisica nel XIX secolo.

Il calcolo di Newton e Leibniz usa gli **infinitesimali**.

Il bisogno di rigore: l'analisi nell'800

Analisi matematica: fondamento della fisica nel XIX secolo.

Il calcolo di Newton e Leibniz usa gli **infinitesimali**.

Ma questi sono **contraddittori** (*"fantasmi di quantità defunte"*, Berkeley).

Il bisogno di rigore: l'analisi nell'800

Analisi matematica: fondamento della fisica nel XIX secolo.

Il calcolo di Newton e Leibniz usa gli **infinitesimali**.

Ma questi sono **contraddittori** (*"fantasmi di quantità defunte"*, Berkeley).

Il progetto (Bolzano, Cauchy, Weierstrass):

Il bisogno di rigore: l'analisi nell'800

Analisi matematica: fondamento della fisica nel XIX secolo.

Il calcolo di Newton e Leibniz usa gli **infinitesimali**.

Ma questi sono **contraddittori** (*"fantasmi di quantità defunte"*, Berkeley).

Il progetto (Bolzano, Cauchy, Weierstrass):

- metodo **assiomatico**;

Il bisogno di rigore: l'analisi nell'800

Analisi matematica: fondamento della fisica nel XIX secolo.

Il calcolo di Newton e Leibniz usa gli **infinitesimali**.

Ma questi sono **contraddittori** (*"fantasmi di quantità defunte"*, Berkeley).

Il progetto (Bolzano, Cauchy, Weierstrass):

- metodo **assiomatico**;
- definizione **rigorosa** dei numeri reali;
- concetto di **continuità** e **limite**.

Il bisogno di rigore: l'analisi nell'800

Analisi matematica: fondamento della fisica nel XIX secolo.

Il calcolo di Newton e Leibniz usa gli **infinitesimali**.

Ma questi sono **contraddittori** (*"fantasmi di quantità defunte"*, Berkeley).

Il progetto (Bolzano, Cauchy, Weierstrass):

- metodo **assiomatico**;
- definizione **rigorosa** dei numeri reali;
- concetto di **continuità** e **limite**.

Primo step: dai numeri naturali $(0, 1, \dots)$ passare agli interi.

Primo step: dai numeri naturali $(0, 1, \dots)$ passare agli interi.

Idea: basta aggiungere un segno davanti!

La costruzione dei numeri reali

Primo step: dai numeri naturali $(0, 1, \dots)$ passare agli interi.

Idea: basta aggiungere un segno davanti!

Secondo step: dai numeri interi ai razionali $(\frac{1}{2}, \frac{5}{7}, \dots)$.

La costruzione dei numeri reali

Primo step: dai numeri naturali $(0, 1, \dots)$ passare agli interi.

Idea: basta aggiungere un segno davanti!

Secondo step: dai numeri interi ai razionali $(\frac{1}{2}, \frac{5}{7}, \dots)$.

Idea: una frazione è semplicemente un insieme di coppie di numeri interi!

La costruzione dei numeri reali

Primo step: dai numeri naturali $(0, 1, \dots)$ passare agli interi.

Idea: basta aggiungere un segno davanti!

Secondo step: dai numeri interi ai razionali $(\frac{1}{2}, \frac{5}{7}, \dots)$.

Idea: una frazione è semplicemente un insieme di coppie di numeri interi!

Terzo step: dai numeri razionali ai reali $(\pi, 0, 101100111000\dots, \dots)$.

Problema: come rappresento un numero la cui parte decimale non ha regolarità con delle frazioni?

Immaginiamo i numeri reali come una linea retta. I numeri razionali lasciano dei “buchi”.

Immaginiamo i numeri reali come una linea retta. I numeri razionali lasciano dei “buchi”.

Idea: identificare il buco come dai numeri che stanno sopra di lui e da quelli che stanno sotto:

$$A \mid B$$

- A : numeri razionali più piccoli;
- B : numeri razionali più grandi.

Tagli di Dedekind

Immaginiamo i numeri reali come una linea retta. I numeri razionali lasciano dei “buchi”.

Idea: identificare il buco come dai numeri che stanno sopra di lui e da quelli che stanno sotto:

$$A \mid B$$

- A : numeri razionali più piccoli;
- B : numeri razionali più grandi.



Prima del XIX secolo i numeri reali sono **dati immediati** che derivano dalla nostra facoltà di ragione.

Prima del XIX secolo i numeri reali sono **dati immediati** che derivano dalla nostra facoltà di ragione.

Ora sono **entità logiche** costruite a partire dai numeri naturali.

Peano (1889): trovare **assiomi** per definire i numeri naturali.

Gli assiomi di Peano

Peano (1889): trovare **assiomi** per definire i numeri naturali.

1. 0 è un numero naturale;

Peano (1889): trovare **assiomi** per definire i numeri naturali.

1. 0 è un numero naturale;
2. ogni n ha un successore $S(n)$;

Peano (1889): trovare **assiomi** per definire i numeri naturali.

1. 0 è un numero naturale;
2. ogni n ha un successore $S(n)$;
3. 0 non è successore di alcun numero;

Peano (1889): trovare **assiomi** per definire i numeri naturali.

1. 0 è un numero naturale;
2. ogni n ha un successore $S(n)$;
3. 0 non è successore di alcun numero;
4. se $S(n) = S(m)$ allora $n = m$;

Peano (1889): trovare **assiomi** per definire i numeri naturali.

1. 0 è un numero naturale;
2. ogni n ha un successore $S(n)$;
3. 0 non è successore di alcun numero;
4. se $S(n) = S(m)$ allora $n = m$;
5. **assioma di induzione:** se una proprietà vale per 0 e si trasmette da n a $S(n)$, allora vale per tutti i numeri naturali.

Peano (1889): trovare **assiomi** per definire i numeri naturali.

1. 0 è un numero naturale;
2. ogni n ha un successore $S(n)$;
3. 0 non è successore di alcun numero;
4. se $S(n) = S(m)$ allora $n = m$;
5. **assioma di induzione:** se una proprietà vale per 0 e si trasmette da n a $S(n)$, allora vale per tutti i numeri naturali.

Qualsiasi cosa soddisfi questi assiomi meriti l'appellativo di insieme dei numeri naturali.

Frege e il Logicismo

Obiettivo: Dimostrare che l'aritmetica è solo **logica** travestita (**logicismo**).

Obiettivo: Dimostrare che l'aritmetica è solo **logica** travestita (**logicismo**).

- **Primo problema:** identificare che cosa significa *logica*;

Obiettivo: Dimostrare che l'aritmetica è solo **logica** travestita (**logicismo**).

- **Primo problema:** identificare che cosa significa *logica*;
- **Secondo problema:** che cosa *significano* le proposizioni matematiche.

Due premesse:

Due premesse:

- i nomi nelle proposizioni matematiche si riferiscono ad oggetti matematici;

Due premesse:

- i nomi nelle proposizioni matematiche si riferiscono ad oggetti matematici;
- le proposizioni matematiche sono **vere**.

Due premesse:

- i nomi nelle proposizioni matematiche si riferiscono ad oggetti matematici;
- le proposizioni matematiche sono **vere**.

Quindi Frege è (quasi) **platonista**.

Due premesse:

- i nomi nelle proposizioni matematiche si riferiscono ad oggetti matematici;
- le proposizioni matematiche sono **vere**.

Quindi Frege è (quasi) **platonista**.

Seconda premessa: da giustificare, strategia: ridurre la matematica alla logica.

Analitico per Kant: “ A è B ” con B già contenuto in A . Solo proposizioni soggetto-predicato.

Analitico per Kant: “ $A \text{ è } B$ ” con B già contenuto in A . Solo proposizioni soggetto-predicato.

Analitico per Frege: **tutte** le verità logiche (*Begriffsschrift*, 1879).

Analitico per Kant: “ $A \text{ è } B$ ” con B già contenuto in A . Solo proposizioni soggetto-predicato.

Analitico per Frege: **tutte** le verità logiche (*Begriffsschrift*, 1879).

Cosa significa essere **vera**? Solo le proposizioni **intere** hanno **significato** (**valore di verità**). Gli oggetti matematici esistono **solo** per fornire significato alle proposizioni intere. Sono quindi **meno** reali degli oggetti fisici.

Dobbiamo analizzare le proposizioni matematiche intere: attribuire valore di verità alle equazioni.

Equinumerosità

Due concetti sono **equinumerosi** se possono essere messi in corrispondenza uno a uno.

Principio di Hume: “Il numero delle cose che soddisfano P è uguale al numero di cose che soddisfano Q ” significa che P e Q sono equinumerosi.

Ora dobbiamo interpretare le equazioni $n = m$.

Ora dobbiamo interpretare le equazioni $n = m$. :

- 0 è il numero delle cose uguali al predicato falso;

Ora dobbiamo interpretare le equazioni $n = m$:

- 0 è il numero delle cose uguali al predicato falso;
- 1 è il numero delle cose uguali al predicato “essere uguali a 0”;

Ora dobbiamo interpretare le equazioni $n = m$:

- 0 è il numero delle cose uguali al predicato falso;
- 1 è il numero delle cose uguali al predicato “essere uguali a 0”;
- 2 è il numero delle cose uguali al predicato “essere uguali a 0 o a 1”;

Ora dobbiamo interpretare le equazioni $n = m$:

- 0 è il numero delle cose uguali al predicato falso;
- 1 è il numero delle cose uguali al predicato “essere uguali a 0”;
- 2 è il numero delle cose uguali al predicato “essere uguali a 0 o a 1”;
- ...

Ora dobbiamo interpretare le equazioni $n = m$:

- 0 è il numero delle cose uguali al predicato falso;
- 1 è il numero delle cose uguali al predicato “essere uguali a 0”;
- 2 è il numero delle cose uguali al predicato “essere uguali a 0 o a 1”;
- ...

Teorema di Frege

Con questa definizione gli assiomi di Peano sono soddisfatti.

Per Frege il principio di Hume fa sicuramente parte della **logica**.

Per Frege il principio di Hume fa sicuramente parte della **logica**.

Qui logica significa semplicemente facoltà della mente il cui ambito di applicazione è il **più ampio possibile**.

Per Frege il principio di Hume fa sicuramente parte della **logica**.

Qui logica significa semplicemente facoltà della mente il cui ambito di applicazione è il **più ampio possibile**.

Logicismo: la matematica è riconducibile alla logica.

Due problemi:

- derivare il principio di Hume;
- dire quando una cosa **non** è un numero;

Due problemi:

- derivare il principio di Hume;
- dire quando una cosa **non** è un numero;

Fino ad ora siamo stati in grado solo di dare un significato alle proposizioni del tipo

“il numero di cose che soddisfano P = numero di cose che soddisfano Q ”

Cosa può significare “ n = il mio gatto”?

Dobbiamo definire che cosa sono i numeri naturali in modo che ne siano esclusi gatti, cani, persone,

Dobbiamo definire che cosa sono i numeri naturali in modo che ne siano esclusi gatti, cani, persone,

Idea: i numeri sono le classi di concetti equinumerosità, quindi metto

“il numero di cose che soddisfano P è l'insieme dei predicati equinumerosi con P ”

Dobbiamo definire che cosa sono i numeri naturali in modo che ne siano esclusi gatti, cani, persone,

Idea: i numeri sono le classi di concetti equinumerosità, quindi metto

“il numero di cose che soddisfano P è l'insieme dei predicati equinumerosi con P ”

Ma allora dobbiamo definire in generale cosa significhi un'equazione del tipo:

“l'insieme delle cose che soddisfano P = l'insieme delle cose che soddisfano Q ”

Frege propone la seguente definizione:

L'insieme delle cose che soddisfano P è uguale all'insieme delle cose che soddisfano Q significa che una cosa soddisfa P se e solo se soddisfa Q .

Frege propone la seguente definizione:

L'insieme delle cose che soddisfano P è uguale all'insieme delle cose che soddisfano Q significa che una cosa soddisfa P se e solo se soddisfa Q .

Da questo deriva il Principio di Hume.

Il principio di comprensione e il paradosso di Russell

Una conseguenza dalla Legge V consente di identificare predicati e insiemi.

Il principio di comprensione e il paradosso di Russell

Una conseguenza dalla Legge V consente di identificare predicati e insiemi.

Principio di comprensione illimitata

Per ogni predicato P esiste l'insieme delle cose che soddisfano P .

Il principio di comprensione e il paradosso di Russell

Una conseguenza dalla Legge V consente di identificare predicati e insiemi.

Principio di comprensione illimitata

Per ogni predicato P esiste l'insieme delle cose che soddisfano P .

Il sistema di Frege crolla nel 1902:

Paradosso di Russell

Cosa succede se P è “non appartenere a sè stessi”?

Il principio di comprensione e il paradosso di Russell

Una conseguenza dalla Legge V consente di identificare predicati e insiemi.

Principio di comprensione illimitata

Per ogni predicato P esiste l'insieme delle cose che soddisfano P .

Il sistema di Frege crolla nel 1902:

Paradosso di Russell

Cosa succede se P è “non appartenere a sè stessi”?

“L'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi” appartiene a se stesso?

Il principio di comprensione e il paradosso di Russell

Una conseguenza dalla Legge V consente di identificare predicati e insiemi.

Principio di comprensione illimitata

Per ogni predicato P esiste l'insieme delle cose che soddisfano P .

Il sistema di Frege crolla nel 1902:

Paradosso di Russell

Cosa succede se P è “non appartenere a sè stessi”?

“L'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi” appartiene a se stesso?

- Se sì, allora no.

Il principio di comprensione e il paradosso di Russell

Una conseguenza dalla Legge V consente di identificare predicati e insiemi.

Principio di comprensione illimitata

Per ogni predicato P esiste l'insieme delle cose che soddisfano P .

Il sistema di Frege crolla nel 1902:

Paradosso di Russell

Cosa succede se P è “non appartenere a sè stessi”?

“L'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi” appartiene a se stesso?

- Se sì, allora no.
- Se no, allora sì.

Il tentativo di fondare la matematica ha portato ad una contraddizione.

Il tentativo di fondare la matematica ha portato ad una contraddizione.
Identificare predicati e insiemi ha portato ad una contraddizione.

Il tentativo di fondare la matematica ha portato ad una contraddizione.

Identificare predicati e insiemi ha portato ad una contraddizione.

Crisi nei fondamenti

Come giustifichiamo gli assiomi di Peano?

Il tentativo di fondare la matematica ha portato ad una contraddizione.

Identificare predicati e insiemi ha portato ad una contraddizione.

Crisi nei fondamenti

Come giustifichiamo gli assiomi di Peano?

Se non nella logica su cosa fondare l'aritmetica?